

kleineren kritischen Stromstärken, oder sogar bei beliebig kleinem Gesamtstrom.

Jedenfalls wird sich bereits bei kleinen Strombelastungen aus diesen Instabilitäten ein stationär-turbulenter Zustand des Halbleiterplasmas entwickeln. Die verhältnismäßig hohe Dissipation, sowie die Oberflächen- und Volumenrekombination wer-

den die Intensität dieser Turbulenz (d. h. das mittlere Quadrat der Schwankungen) stets klein halten, so daß sie nur als schwaches elektrisches Rauschen (wahrscheinlich das Funkelrauschen) in Verstärkern mit Halbleiterbauelementen zutage treten wird. Dieses Rauschen wird Gegenstand einer folgenden Arbeit (III) sein.

## Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen in Halbleitern III

### Turbulenz im Halbleiterplasma und Funkelrauschen

P. H. HANDEL

Institut für Physik der Rumänischen Akademie, Bukarest

(Z. Naturforsch. 21 a, 579—593 [1966]; eingegangen am 12. August 1965)

Die von Strominstabilitäten in Halbleitern hervorgerufene hydromagnetische Turbulenz des Ladungsträgerplasmas wird im homogenen und isotropen Fall mit Hilfe einer Quasinormalitäts-hypothese behandelt. Es wurde noch die unwesentliche Einschränkung auf gleiche Beweglichkeit der Ladungsträger und auf Eigenleitung gemacht. Dynamische Grundgleichungen wurden für die stationäre und für die nicht-stationäre Turbulenz erhalten. Die stationäre Lösung ergibt ein Wellenzahlspektrum und eine Korrelationsfunktion, die ein  $(1/f)$ -Spektrum des Magnetfeldes liefern. Der Übergang zum räumlich begrenzten Halbleiter führt schließlich auf ein  $(1/f)$ -Spektrum der Stromschwankungen. Das erlaubt die allgemeine Deutung des Funkelrauschen als von Strominstabilitäten im Plasma der Ladungsträger ausgelösten Turbulenzprozeß. Die bekannten Eigenschaften des Funkelrauschen werden auf Grund dieser Theorie erklärt.

#### § 1. Einleitung

In zwei früheren Arbeiten<sup>1</sup> wurden die in Halbleitern ohne Anlegung eines Magnetfeldes möglichen Instabilitäten des Ladungsträgerplasmas untersucht. Es sind einerseits die in I, A aufgefundenen, bei genügend großem Oberflächenpotential möglicherweise vorkommenden Oberflächeninstabilitäten und andererseits die in I, B behandelten Rekombinationswellen, jedoch besonders die in II, §§ 4—5, erhaltenen Strominstabilitäten an einer Potential-schwelle, z. B. an einer quer zur Stromrichtung verlaufenden Inhomogenität der Störstellenverteilung, oder an einem Kontakt. Unabhängig davon, welche Kombination dieser Effekte tatsächlich auftritt, wird der laminare Strömungszustand dadurch zerstört, und schließlich stellt sich ein turbulenter stationärer Zustand ein. Praktisch wird sich dieser Zustand sehr schnell einstellen und der Stromfluß von Anfang an turbulent sein, so daß experimentell immer ein charakteristisches Stromrauschen nachweisbar sein wird.

<sup>1</sup> P. H. HANDEL, Instabilitäten, Turbulenz und Funkelrauschen I und II, Z. Naturforsch. 21 a, 561, 573 [1966]; im folgenden als I und II angeführt.

<sup>2</sup> Nehmen wir eine einzige effektive Masse  $m$  und einen einzigen Absolutwert der Driftgeschwindigkeit für beide Arten von Ladungsträgern an, so wird das Verhältnis der ma-

In diesem Zusammenhang erinnern wir an die Abwesenheit eines kritischen Stromes bei den in I, A behandelten Oberflächeninstabilitäten. Instabilitäten traten dort auch bei verschwindend kleinen angelegten elektrischen Feldstärken auf, nur waren sie in Abwesenheit des angelegten elektrischen Feldes neutral, also elektrisch nicht beobachtbar und energetisch jedenfalls in thermischem Gleichgewicht. Auch bei den in II, §§ 4—5, erhaltenen hydromagnetischen Strominstabilitäten kann die kritische angelegte Spannung infolge von Inhomogenitäten unter Mitwirkung von thermischen Effekten oder direkten Aktivierungseffekten sehr klein werden. Auch gelang es uns noch nicht, Kombinationen der oben angeführten Instabilitäten zu behandeln und deren kritische Parameter — die jedenfalls kleiner sein werden — zu behandeln.

Die Turbulenz des Halbleiterplasmas wird in dieser Arbeit als eine vorwiegend magnetische Turbulenz behandelt. Eine einfache Abschätzung<sup>2</sup> zeigt, daß in Halbleiterdrähten, deren Durchmesser nicht

genetischen zur mechanisch-kinetischen Energie  $W_m/W_k = 2\gamma r_0 N$ , mit  $r_0 \equiv e^2/m c^2$  und  $\gamma \equiv \frac{1}{2} + \ln R/r$ . Dabei ist  $N$  die gesamte Anzahl der Ladungsträger pro Längeneinheit,  $r$  der Halbmesser des Probenquerschnittes und  $R$  größtenteilsmäßig der Halbmesser des elektrischen Kreises, in den die Probe geschaltet ist.



viel kleiner als 0,1 mm ist, die mechanische Strömungsenergie des Elektronen- und Löcher-Plasmas im Vergleich zur magnetischen verschwindet. Überhaupt verschwinden die mechanisch-inertielien Glie-der praktisch neben dem Reibungsglied, das die Wechselwirkung mit den Phononen des Gitters in vereinfachter Form beschreibt. Die Trägheit des Plasmas wird also hier vorwiegend auf das eigene Magnetfeld zurückgeführt. In den dissipativen Glie-dern ist die (durch direkte Wechselwirkung der Plasmateilchen bedingte) Viskosität vernachlässigbar im Vergleich mit der individuellen „Reibung“ der Plasmateilchen am Gitter<sup>3</sup>. Dieser Umstand ist von großer Bedeutung, denn er erlaubt uns, an Stelle von Viskosität und Leitfähigkeit nur einen dissipativen Parameter einzuführen, die „Reibungskonstante“  $\nu$ . Diese Besonderheit der Dissipation im Halbleiterplasma ist wesentlich für die Gestaltung der turbulenten Dynamik und erleichtert die dimensionale Analyse.

Um das Problem noch weiter zu vereinfachen, beschränken wir uns auf die Modellvorstellung der inkompressiblen, homogenen und isotropen Turbulenz eines symmetrischen eigenleitenden Halbleiters. Die Symmetrie bedeutet hier Gleichheit der Reibungskoeffizienten von Elektronen und Löchern  $\nu_n = \nu_p$ . Da uns besonders langsame Turbulenzprozesse, mit unter der Schallgeschwindigkeit im Halbleiterplasma liegenden charakteristischen Geschwindigkeiten, interessieren, ist die in der Turbulenztheorie<sup>4-9</sup> übliche Beschränkung auf Inkompressibilität, d. h. auf solenoidale Turbulenz, auch hier am Platze. Bei der Untersuchung der lokalen statistischen Eigenschaften der Turbulenz gehen wir von der Auffassung aus, daß diese weitgehend universell sind und somit verhältnismäßig schwach von den konkreten Bedingungen der Turbulenzgeneration, durch Instabilitäten der Hauptströmung, beeinflußt werden. Diese in der Turbulenztheorie übliche Annahme gestattet uns, auf die homogene isotrope Turbulenz eines chaotisch aufgewirbelten, räumlich unbegrenzten Halbleiterplasmas zurückzugreifen. Als Alternative zum Problem der abklingenden Turbu-

lenz werden wir auch die stationäre, durch eine isotrop-homogen-chaotische Aufwirblungsvorrichtung (random stirring forces) unterhaltene Turbulenz be- trachten. Schließlich werden wir zur Entkopplung der dynamischen Gleichungskette für die Korrelatio- nen die Quasinormalitätshypothese anwenden [Gl. (30), § 3].

Im folgenden werden die Ausgangsgleichungen aufgestellt und auf eine einzige Grundgleichung zu- rückgeführt (§ 2), welche nach Einführung der Kor- relationen in § 3 die Erhaltung der dynamischen Grundgleichungen der Turbulenz (§ 4) gestattet. § 5 bringt einige Betrachtungen über die Energie- übertragung im Wellenzahlspektrum der Turbulenz. In § 6 wird eine Lösung der dynamischen Grund- gleichungen aufgestellt und in § 7 folgt daraus das Frequenzspektrum der Turbulenz. Das experimentell überprüfbare und somit besonders interessante, für die Turbulenz in begrenzten Halbleitern charakteristi- sche Frequenzspektrum der Stromschwankungen wird in § 9 abgeleitet. Schließlich wird in § 10 ge- zeigt, wie die Turbulenz des Halbleiterplasmas als Funkelrauschen zutage tritt.

## § 2. Ausgangsgleichungen

Mit den eben besprochenen Vereinfachungen erhält das auch in I und II zugrunde gelegte Gle- chungssystem die Form:

$$2\nu\mathbf{v}^+ = \frac{e}{c}\mathbf{v}^-\times\mathbf{B} - \frac{1}{n}\nabla P, \quad (1)$$

$$\nu\mathbf{v}^- = 2e[\mathbf{E} + \mathbf{v}^+/c \times \mathbf{B}] - \frac{1}{n}\nabla(P_p - P_n), \quad (2)$$

$$\nabla\mathbf{v}^+ = 0 \quad (n = \text{const}), \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi e}{c}n\mathbf{v}^-, \quad (5)$$

$$\nabla\mathbf{B} = 0. \quad (6)$$

Hier bedeutet  $n$  die Konzentration der Elektron – Loch-Paare,  $\nu$  den Reibungskoeffizienten,  $P_n$ ,  $P_p$

<sup>3</sup> Siehe Anm. <sup>2</sup> aus II.

<sup>4</sup> L. AGOSTINI u. J. BASS, *Les Theories de la Turbulence*, Publ. sci. et tech. ministère air, No. 237, Paris 1950.

<sup>5</sup> G. K. BATCHELOR, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, New York 1953.

<sup>6</sup> J. O. HINZE, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York 1959.

<sup>7</sup> W. HEISENBERG, *Z. Phys.* **124**, 628 [1948]; *Proc. Roy. Soc. London A* **195**, 1042 [1948].

<sup>8</sup> S. CHANDRASEKHAR, *Proc. Roy. Soc. London A* **229**, 1 [1955]; **A** **233**, 322 [1955].

<sup>9</sup> R. H. KRAICHNAN, *Phys. Rev.* **109**, 1407 [1958]. Siehe auch die Synthese von T. TATSUMI in *Supplement of Progr. Theor. Phys. Japan* **24**, 156 [1962].

und  $P$  den Druck der Elektronen, bzw. der Löcher und den Gesamtdruck. Die Bezeichnungen

$$\mathbf{v}^+ = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{v}^- = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_n$$

wurden allgemeiner schon in <sup>3</sup> eingeführt, dabei sind  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_p$  die Driftgeschwindigkeiten der Elektronen und Löcher.

Betrachten wir nun ein unbegrenztes, homogen aufgewirbeltes Halbleiterplasma, so können wir die im Würfel von Kantenlänge  $L$  definierten Größen in FOURIER-Reihen entwickeln, z. B.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \exp\{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\}. \quad (7)$$

Da  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  reell ist, folgt

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t) = \mathbf{B}(-\mathbf{k}, t). \quad (7')$$

Für die FOURIER-Komponenten erhalten wir die Gleichungen

---


$$\text{die Gleichung} \quad \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 \mathbf{B}(\mathbf{k}) = i \mathbf{k} \times \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{v}^+(\mathbf{k}') \times \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (15)$$

Aus Gl. (8) folgt

$$\mathbf{v}^+(\mathbf{k}) = \frac{i}{8 \pi \nu n} \sum_{\mathbf{k}''} \left\{ \mathbf{B}(\mathbf{k}'') [\mathbf{k}'' \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')] - \mathbf{k}'' [\mathbf{B}(\mathbf{k}'') \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')] \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{k}(1 - \delta_{\mathbf{k}, 0})}{k^2} [\mathbf{k}'' \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') (\mathbf{k} \mathbf{B}(\mathbf{k}'')) - \mathbf{B}(\mathbf{k}'') \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') (\mathbf{k} \mathbf{k}'')] \right\} \quad (16)$$

und somit bringt man Gl. (15) schließlich in die Form

$$\frac{\partial b_{\beta}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 b_{\beta}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{k}''} b_{\beta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) b_1(\mathbf{k}'', t) b_m(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t) (k_j \delta_{\beta s} - k_s \delta_{\beta j}) \\ \cdot \left[ k_s'' \delta_{lm} - k_m'' \delta_{ls} + \frac{k_s'(1 - \delta_{\mathbf{k}, 0})}{k^2} (k_m'' k_l' - \mathbf{k}' \mathbf{k}'' \delta_{lm}) \right], \quad (17)$$

worin

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/\sqrt{8 \pi \nu n} \quad \text{ist.} \quad (18)$$

### § 3. Korrelationen

Ist  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  das (makroskopische) Magnetfeld im Punkte  $\mathbf{r}$  zur Zeit  $t$ , so definieren die Ensemble <sup>10</sup>-Mittelwerte

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \tau) = \langle B_{\alpha}^*(\mathbf{r}, t) B_{\beta}(\mathbf{r} + \mathbf{p}, t + \tau) \rangle, \quad (19)$$

die allgemein immer noch von  $\mathbf{r}$  und  $t$  abhängig sein können <sup>11</sup>, den raumzeitlichen Korrelationstensor des Magnetfeldes. Unter homogenen Verhältnissen verschwindet die  $\mathbf{r}$ -Abhängigkeit und die Mittelung in (19) kann auch als räumliche Mittelung betrachtet werden. Ist die Turbulenz stationär, so wird der

$$2 \nu \mathbf{v}^+(\mathbf{k}) = \frac{e}{c} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{v}^-(\mathbf{k}') \times \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{i}{n} \mathbf{k} P(\mathbf{k}), \quad (8)$$

$$\nu \mathbf{v}^-(\mathbf{k}) = 2 e \left[ \mathbf{E}(\mathbf{k}) + \frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{v}^+(\mathbf{k}') \times \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right] \\ - \frac{i}{n} \mathbf{k} [P_p(\mathbf{k}) - P_n(\mathbf{k})], \quad (9)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{v}^+(\mathbf{k}) = 0, \quad (10)$$

$$i \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t}, \quad (11)$$

$$i \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{4 \pi e}{c} n \mathbf{v}^-(\mathbf{k}), \quad (12)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0. \quad (13)$$

Setzt man das aus (9) bestimmte  $\mathbf{E}$  in (11) ein, so folgt unter Beachtung von Gl. (12) mit der Bezeichnung

$$\bar{\nu} \equiv c^2 \nu / 8 \pi n e^2 \quad (14)$$

$$\text{Tensor unabhängig von } t \text{ und die Mittelung in (19) kann auch als zeitliche Mittelung aufgefaßt werden. Für } \tau = 0 \text{ gibt (19) den räumlichen Korrelationstensor } W_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = W_{\beta\alpha}(-\mathbf{p}) \text{ und für } \mathbf{p} = 0 \text{ den zeitlichen Korrelationstensor } W_{\alpha\beta}(\tau) = W_{\beta\alpha}(-\tau).$$

Beschränken wir uns auf den homogenen Fall, ergänzen wir einfach die Ensemble-Mittelung durch eine räumliche Mittelung, und greifen wir auf die FOURIER-Entwicklung im Würfel von Kantenlänge  $L$  zurück, so ist

<sup>11</sup> Diese Abhängigkeit von Ort  $\mathbf{r}$  und Zeit  $t$  wird hier und im folgenden einfacheitshalber nicht in den Argumenten von  $W_{\alpha\beta}$  angegeben.

<sup>10</sup> Es ist hier von einem turbulenten Ensemble die Rede, dessen Ensemble-Elemente makroskopisch verschiedene Realisierungen eines (z. B. durch Angabe einer Aufwirblungsprozedur) gegebenen turbulenten Zustandes sind.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta}(\rho, \tau) &= \left\langle \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} B_{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) B_{\beta}(\mathbf{k}', t + \tau) \exp\{i \mathbf{k}' \rho\} \exp\{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}\} \right\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \langle B_{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) B_{\beta}(\mathbf{k}, t + \tau) \rangle \exp\{i \mathbf{k} \rho\} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \langle B_{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) B_{\beta}(\mathbf{k}, t + \tau) \exp\{i \mathbf{k} \rho\} \rangle d^3k \\
&= \int W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau) \exp\{i \mathbf{k} \rho\} d^3k, \quad (20)
\end{aligned}$$

da der räumliche Mittelwert von  $\exp\{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}\}$  gleich  $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$  ist. Ist  $\rho = 0$  und  $\tau = 0$ , so folgt aus (20) die Deutung von

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \langle B_{\alpha}^*(\mathbf{k}, t) B_{\beta}(\mathbf{k}, t) \rangle = W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \quad (21)$$

als 3-dimensionalen Spektraltensor. Ist nur  $\tau = 0$  und  $\rho \neq 0$ , so besagt Gl. (20), daß der Spektraltensor durch eine FOURIER-Transformation aus dem Korrelationstensor hervorgeht. Ebenso ist im stationären Fall der zeitliche Spektraltensor durch FOURIER-Transformation aus dem zeitlichen Korrelationstensor zu bestimmten (WIENER-KHINTCHINESCHES Theorem):

$$W_{\alpha\beta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha\beta}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = W_{\alpha\beta}(-\tau) \quad (22)$$

$$\text{und} \quad W_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha\beta}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_{\alpha\beta}(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (23)$$

In dem letzten Ausdruck aus (22) und (23) wurde  $\alpha$  mit  $\beta$  vertauscht, wie das im isotropen Fall gerechtfertigt ist.

Wird die Homogenität durch Isotropie ergänzt, so muß  $W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau)$  aus Symmetriegründen die Form  $A(k) \delta_{\alpha\beta} + B(k) k_{\alpha} k_{\beta}$  haben. Wird auch die Orthogonalität (13) in Betracht gezogen, so folgt daraus bekanntlich die Form

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{2} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right) U(k, \tau). \quad (24)$$

Durch Kontraktion folgt für den hier eingeführten Korrelationsskalar  $U(k, \tau)$  der isotropen Turbulenz die Definition

$$U(k, \tau) = \sum_{\alpha} W_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, \tau) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \langle \mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, t + \tau) \rangle. \quad (25)$$

Unter homogenen stationären Verhältnissen genügen die eingeführten Korrelationsgrößen noch folgenden Beziehungen, die einfach aus ihren Definitionen fließen:

$$W_{\alpha\beta}(\rho, \tau) = W_{\beta\alpha}(-\rho, -\tau), \quad (26) \quad W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau) = W_{\beta\alpha}^*(\mathbf{k}, -\tau) = W_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}, -\tau), \quad (27)$$

$$W_{\alpha\beta}(\rho, \omega) = W_{\beta\alpha}^*(-\rho, \omega), \quad (28) \quad U(k, \tau) = U(k, -\tau) = U^*(k, \tau). \quad (29)$$

Ebenso lassen sich analoge Korrelationen auf den anderen Schwankungsgrößen  $\mathbf{v}^+, \mathbf{v}^-, \mathbf{E}, P$  oder  $\mathbf{j} = e \mathbf{n} \mathbf{v}^-$  aufbauen.

Neben diesen Korrelationen zweiter Stufe sind auch andere, höherer Stufenzahl zu betrachten. So wird z. B. in Gl. (32) § 4 der Zweizeit-Zweipunkt-Korrelationstensor vierter Stufe

$$\langle B_i^*(\mathbf{k}, t - \tau) B_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) B_l(\mathbf{k}'', t) B_m(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t) \rangle$$

vorkommen. Nimmt man an, die vier Schwankungsgrößen, die in diesen Tensor eingehen, seien Gegenstand einer Normalverteilung, so kann man ihn durch Korrelationstensoren zweiter Stufe ausdrücken, nach dem Schema

$$\langle ABCD \rangle = \langle AB \rangle \langle CD \rangle + \langle AC \rangle \langle BD \rangle + \langle AD \rangle \langle BC \rangle. \quad (30)$$

Man erhält so die Zerlegung

$$\begin{aligned}
\langle B_i^*(\mathbf{k}, t - \tau) B_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) B_l(\mathbf{k}'', t) B_m(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t) \rangle &= W_{ij}(\mathbf{k}, \tau) W_{ml}(\mathbf{k}'', 0) \delta_{\mathbf{k}'', 0} \\
&+ W_{il}(\mathbf{k}, \tau) W_{mj}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', 0) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} + W_{im}(\mathbf{k}, \tau) W_{lj}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', 0) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' - \mathbf{k}'}, \quad (31)
\end{aligned}$$

in der die Fußnote <sup>11</sup> jedenfalls zu beachten ist. In Gl. (31) wurde die Phase von  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, t)$  als absolut chaotisch verteilt und zu jener von  $\mathbf{B}(\mathbf{k}', t)$  mit  $\mathbf{k}' \neq \pm \mathbf{k}$  unkorreliert angenommen, daher die KRONECKER-Symbole. Dadurch wurden die feineren, durch die Bewegungsgleichung (17) entstehenden Phasenkorrelationen zwischen  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{k}', t)$  vernachlässigt gegenüber der jedenfalls vorhandenen, durch Gl. (7') gegebenen, banalen Korrelation.

Die Quasinormalitätshypothese (30) wurde von MILLIONSCHTSCHIKOW <sup>12</sup> für die Zweipunkt-Verteilung der turbulenten Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit eingeführt. HEISENBERG <sup>7</sup>, OBUCHOW <sup>13</sup>, BATCHELOR <sup>14</sup>, CHANDRASEKHAR <sup>15</sup>, PROUDMAN <sup>16</sup> u. a. benützten diese Hypothese, um die turbulenten Druckschwankungen zu berechnen. Um Bestimmungsgleichungen für das Turbulenzspektrum bei hohen REYNOLDSSchen Zahlen abzuleiten, hat HEISENBERG die Quasinormalitätshypothese auf die Zweizeit-Verteilung der FOURIER-Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes erweitert. CHANDRASEKHAR hat mit Hilfe dieser erweiterten Hypothese eine hydrodynamische und hydromagnetische Turbulenztheorie <sup>8</sup> formuliert. UBEROI <sup>17</sup> und BATCHELOR <sup>5</sup> haben den Vergleich der Hypothese von MILLIONSCHTSCHIKOW mit der Erfahrung durchgeführt und gute Übereinstimmung erhalten. Allerdings hat z. B. KRAICHNAN <sup>18</sup> gezeigt, daß die Quasinormalitätshypothese der Geschwindigkeitsverteilung eine Verletzung des Energiesatzes zur Folge hat und somit mit den Bewegungsgleichungen inkonsistent ist. In unserem Fall wird in § 5 gezeigt, daß bei  $\tau = 0$  keine solche störende Effekte vorhanden sind, so daß die Hypothese prinzipiell anwendbar ist.

#### § 4. Dynamische Grundgleichungen der Turbulenz

Multipliziert man Gl. (17) mit  $b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau)$  und bildet man den Ensemble-Mittelwert, so folgt

$$\left\langle b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial b_\beta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau) b_\beta(\mathbf{k}, t) \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \langle b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau) b_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \cdot b_1(\mathbf{k}'', t) b_m(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t) \rangle \cdot (k_j \delta_{js} - k_s \delta_{sj}) \left[ k_s'' \delta_{lm} - k_m'' \delta_{ls} + \frac{k_s'(1 - \delta_{k',0})}{k'^2} (k_l' k_m'' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}'' \delta_{lm}) \right]. \quad (32)$$

Wird die Quasinormalitätshypothese (31) angewendet, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left\langle b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial b_\beta(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 b_a^*(\mathbf{k}, t - \tau) b_\beta(\mathbf{k}, t) \right\rangle \\ &= \langle b_a(\mathbf{k}, t - \tau) b_j(\mathbf{k}, t) \rangle \sum_{\mathbf{k}'} \langle b_1^*(\mathbf{k}', t) b_m(\mathbf{k}', t) \rangle R_{jml\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{mit } R_{jml\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv k_j k_m \delta_{l\beta} - k_m k_l \delta_{j\beta} + 2 \frac{(k - k')_j (k - k')_m}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} [k_l(k - k'_\beta) - \mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{l\beta}]. \quad (34)$$

a) *Im nicht stationären Fall* liefert Gl. (33) mit  $\tau = 0$  durch Addieren der hermitesch konjugierten Gleichung die dynamische Grundgleichung

$$\frac{\partial w_{\alpha\beta}(\mathbf{k})}{\partial t} + 2 \bar{\nu} k^2 w_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 w_{\alpha j}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}'} w_{lm}(\mathbf{k}') R_{jml\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + (\alpha \longleftrightarrow \beta), \quad (35)$$

worin  $(\alpha \longleftrightarrow \beta)$  die hermitesch Konjugierte des zuvorstehenden Gliedes bezeichnet und  $w_{\alpha\beta}$  bis auf einen Faktor durch (21) erklärt ist; allgemein ist ja

$$w_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} / 8\pi\nu n, \quad u \equiv U / 8\pi\nu n. \quad (36)$$

Mit (25) ergibt Gl. (35) unter isotropen Verhältnissen die dynamische Grundgleichung der isotropen, nicht stationären Turbulenz

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(k)}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 u(k) = - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \frac{u(k)}{2} \sum_{\mathbf{k}} u(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k})^2} [k^2 \mathbf{k}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^2], \quad (37)$$

<sup>12</sup> M. MILLIONSCHTSCHIKOW, Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 615, 619 [1941]. <sup>15</sup> S. CHANDRASEKHAR, Proc. Roy. Soc. London A **210**, 18 [1951].

<sup>13</sup> A. M. OBUCHOW, Dokl. Akad. Nauk SSSR **66**, 17 [1949]. <sup>16</sup> J. PROUDMAN, Proc. Roy. Soc. London A **214**, 119 [1952].

<sup>14</sup> G. K. BATCHELOR, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47**, 359 [1951]. <sup>17</sup> M. S. UBEROI, J. Aeronaut. Sci. **20**, 197 [1953].

<sup>18</sup> R. H. KRAICHNAN, Phys. Rev. **107**, 1485 [1957].

oder (für  $L \rightarrow \infty$ ) 
$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(k)}{\partial t} + \bar{v} k^2 u(k) = - \frac{\pi}{4} u(k) \int_0^\infty \Phi(k, \varkappa) u(\varkappa) d\varkappa \quad (38)$$

mit 
$$\Phi(k, \varkappa) \equiv \frac{8}{3} k^2 \varkappa^2 + k^4 - \varkappa^4 + \frac{(k^2 - \varkappa^2)^3}{2 \varkappa k} \ln \frac{|k - \varkappa|}{k + \varkappa}. \quad (39)$$

Gl. (38) beschreibt die zeitliche Abschwächung der Plasmaturbulenz durch die magnetische und mechanische Dissipation [siehe Gl. (47) und (54) von § 5].

b) Um eine *stationäre Turbulenz* aufrechtzuerhalten, ist eine Energiequelle notwendig. Naturgemäß ist die Hauptströmung diese Quelle. In unserem idealisierten, räumlich unbegrenzten, homogenen, isotropen und stationären Problem werden wir entsprechend eine statistisch homogene, isotrope und stationäre Aufwirblungskraft zu Hilfe rufen, die in den Gln. (1) und (8) oder (2) und (9) ein stochastisches Zusatzglied  $\mathbf{F}'$  oder  $\mathbf{E}'$  ergibt. Dieses Zusatzglied liefert in Gl. (38) ein Quellglied  $h(k)$  und man erhält aus (33) mit  $\tau = 0$  die stationäre Grundgleichung

$$h(k) = \bar{v} k^2 u(k) + \frac{\pi}{4} u(k) \int_0^\infty \Phi(k, \varkappa) u(\varkappa) d\varkappa, \text{ z. B. mit } h(k) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{k}, t) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}'(\mathbf{k}, t)] \rangle, \quad (40)$$

die bei vorgegebenem  $h(k)$  das Wellenzahlspektrum der isotropen Turbulenz bestimmt. Nehmen wir an, das Zusatzglied habe ein weißes Frequenzspektrum, weise also dem WIENER-KHINTCHINESchen Theorem zu folge keine zeitliche Autokorrelation auf<sup>19</sup>, so ist

$$h(k, \tau) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{k}, t - \tau) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}'(\mathbf{k}, t)] \rangle = 0 \quad \text{für } \tau \neq 0 \quad (41)$$

und Gl. (33) liefert im stationären Fall mit  $\tau \neq 0$  die Grundgleichung

$$\frac{\partial w_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} + \bar{v} k^2 w_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau) = \left( \frac{2\pi}{L} \right)^3 w_{\alpha j}(\mathbf{k}, \tau) \sum_{\mathbf{x}} w_{lm}(\mathbf{x}, 0) R_{jml\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{x}). \quad (42)$$

Allgemein wird aber das stochastische Aufwirblungsglied kein absolut weißes Frequenzspektrum besitzen und es bleibt fraglich, ob gerade ein weißes Spektrum der Aufwirblungswirkung des Hauptstromes am besten entspricht. Die Gültigkeit der Gln. (42), (43) erstreckt sich also nicht bis zu beliebig kleinen  $\tau$ -Werten, was auch wegen der Vernachlässigung der Kompressibilität zu erwarten ist. Tatsächlich muß für  $\tau < \tau_0$ , wo  $\tau_0$  die effektive integrale Autokorrelationszeit von  $\mathbf{F}'$  oder  $\mathbf{E}'$  ist, in (42) und (43) noch das Aufwirblungsglied  $h(\mathbf{k}, \tau)$  eingeschaltet werden. Dadurch wird das Verhalten von  $u(k, \tau)$  für  $\tau \rightarrow 0$  wesentlich geändert, und zwar so, daß die  $\tau$ -Ableitungen unpaariger Ordnungszahl von  $u(k, \tau)$  bei  $\tau = 0$  verschwinden. Die Kompressibilität ändert nur die numerischen Werte der Ableitungen paariger Ordnungszahl bei  $\tau = 0$ .

Mit (25) folgt schließlich aus (42) die Grundgleichung der stationären isotropen Plasmaturbulenz

$$\frac{\partial u(k, \tau)}{\partial \tau} + \bar{v} k^2 u(k, \tau) = - \frac{\pi}{4} u(k, \tau) \int_0^\infty \Phi(k, \varkappa) u(\varkappa, 0) d\varkappa. \quad (43)$$

Dabei sind  $R_{jml\beta}$  und  $\Phi(k, \varkappa)$  wieder durch (34) und (39) erklärt.

## § 5. Energieübertragung und Dissipation im Spektrum

Um festzustellen, wo in den Grundgleichungen von § 4 die Dissipation und die (konservative) Energieübertragung zwischen Turbulenzelementen verschiedener Größe enthalten ist, wollen wir den Energiehaushalt der Turbulenz etwas näher betrachten. Dazu multiplizieren wir Gl. (15) skalar mit  $\mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t)$ :

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \bar{v} k^2 |\mathbf{B}(\mathbf{k}, t)|^2 = -i \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{v}^*(\mathbf{k}', t), \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t), \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t)). \quad (44)$$

Hier und im folgenden bezeichnet die große runde Klammer das gemischte Produkt der 3 durch Kommas getrennten Vektoren, deren zyklische Vertauschung bekanntlich belanglos ist. Summiert man Gl. (44) über alle  $\mathbf{k}$ -Werte, so folgt mit (12) :

<sup>19</sup> Die Autokorrelationsfunktion wird dann eine DIRACsche  $\delta$ -Funktion der Korrelationszeit  $\tau$  sein.

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}^*(\mathbf{k}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t} + \bar{\nu} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\mathbf{B}(\mathbf{k})|^2 = - \frac{4\pi e}{c} n \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{v}^+(\mathbf{k}') \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}^-(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (45)$$

Das Vorhandensein der Summe über die  $\mathbf{k}$ -Vektoren ermöglicht mit (8) und (10) den Übergang zu

$$\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}^*(\mathbf{k}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{k})}{\partial t} + \bar{\nu} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\mathbf{B}(\mathbf{k})|^2 = -8\pi\nu n \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{v}^+(\mathbf{k})|^2 = -i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{v}^+(\mathbf{k}), \mathbf{B}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \mathbf{k}' \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}')). \quad (46)$$

Addieren wir noch die komplex konjugierte Gleichung, so folgt mit (12) und (13) die Energiegleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{B}(\mathbf{k})|^2 = -2\pi\nu n \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{v}^-(\mathbf{k})|^2 - 8\pi\nu n \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{v}^+(\mathbf{k})|^2. \quad (47)$$

Man kann also

$$D_m(\mathbf{k}) \equiv 8\pi\nu n \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 |\mathbf{v}^+(\mathbf{k})|^2 = i \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}'} (\mathbf{v}^+(\mathbf{k}), \mathbf{B}^*(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \mathbf{k}' \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}')) \quad (48)$$

$$\text{und} \quad D_e(\mathbf{k}) \equiv 2\pi\nu n \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 |\mathbf{v}^-(\mathbf{k})|^2 = \bar{\nu} k^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 |\mathbf{B}(\mathbf{k})|^2 \quad (49)$$

bzw. als mechanische und elektrische Dissipation bei dem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  ansprechen (siehe auch <sup>3</sup>). Addieren wir auf beiden Seiten von Gl. (44)  $D_m(\mathbf{k})$  hinzu, so folgt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{B}(\mathbf{k})|^2 + \bar{\nu} k^2 |\mathbf{B}(\mathbf{k}, t)|^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 D_m(\mathbf{k}) = - \left(\frac{2\pi}{L}\right)^6 \sum_{\mathbf{k}'} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (50)$$

worin

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^6 \text{Re}[i(\mathbf{v}^+(\mathbf{k}'), \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k})) - i(\mathbf{v}^+(\mathbf{k}), \mathbf{B}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \mathbf{k}' \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}'))] = -T(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \quad (51)$$

die Energieübertragung (Transfer) von  $\mathbf{k}$  zu  $\mathbf{k}'$  pro Sekunde und Einheit der  $\mathbf{k}$ - und  $\mathbf{k}'$ -Intervalle bezeichnet. Summiert man Gl. (50) über  $\mathbf{k}$ , so verschwindet die rechte Seite; die Antisymmetrie von  $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  drückt also den konservativen Charakter der Energieübertragung aus.

Um die Energieübertragung zu berechnen, benützen wir Gl. (16) und erhalten

$$i(\mathbf{v}^+(\mathbf{k}'), \mathbf{B}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \mathbf{k} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k})) = \frac{1}{8\pi\nu n} \sum_{\mathbf{k}''} B_i^*(\mathbf{k}) B_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') B_l(\mathbf{k}'') B_m(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot (k_j \delta_{is} - k_s \delta_{ij}) \left[ k_m'' \delta_{ls} - k_s'' \delta_{lm} - \frac{k_s'(1 - \delta_{k',0})}{k^2} (k_m'' k_l' - \mathbf{k}' \mathbf{k}'' \delta_{lm}) \right], \quad (52)$$

$$i(\mathbf{v}^+(\mathbf{k}), \mathbf{B}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \mathbf{k}' \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}')) = (\mathbf{k} \longleftrightarrow \mathbf{k}'). \quad (53)$$

worin  $(\mathbf{k} \longleftrightarrow \mathbf{k}')$  die Vertauschung von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$  in (52) bedeutet. Mitteln wir nun Gl. (50), so folgt aus (52) und (53) mit der statistischen Hypothese (31) eine andere Form der dynamischen Grundgleichung (37) bzw. (38)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U(k)}{\partial t} + \bar{\nu} k^2 U(k) + D_m(\mathbf{k}) = - \int T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d^3 \mathbf{k}', \quad (54)$$

wobei die Definition (25) beachtet wurde und

$$8\pi\nu n T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \text{Re}[W_{ij}(\mathbf{k}) W_{lm}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') R_{jmli}(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') - W_{ij}(\mathbf{k}') W_{lm}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) R_{jmli}(\mathbf{k}', \mathbf{k}' - \mathbf{k})] \quad (55)$$

ist.  $R_{jmli}$  bleibt durch (34) erklärt. Unter isotropen Verhältnissen erhält man daraus mit (24) den Ausdruck

$$16\pi\nu n T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = U(k) U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{k} \mathbf{k}' \frac{k^2 k'^2 - (\mathbf{k} \mathbf{k}')^2}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} - (\mathbf{k} \longleftrightarrow \mathbf{k}') \quad (56)$$

für die in Gl. (54) vorkommende Energieübertragung.

Man erkennt aus den Gln. (54) – (56), daß die Anwendung der Quasinormalitätshypothese (31) wegen der Antisymmetrie von  $T(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  den konservativen Charakter der Energieübertragung wahrt. Bei  $\nu \rightarrow 0$  (verschwindende Dissipation) verliert die ganze hier gegebene Behandlungsweise ihren Sinn, vor allem weil dann die mechanisch-inertielichen Glieder in den Bewegungsgleichungen nicht mehr vernachlässigbar sind und Gl. (16) nicht mehr gültig ist.

Schließlich bemerkt man, daß das erste Glied in (56) mit  $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{x}$  durch Summation die rechte Seite von Gl. (37) und (38) ergibt. Die rechte Seite von Gl. (37) und (38) enthält also (mit umgekehrtem Vorzeichen) sowohl die Energieübertragung als auch die mechanische Dissipation. Ihre über alle  $\mathbf{k}$ -Vektoren ausgedehnte Summe ergibt die gesamte mechanische Dissipation mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Funktion  $\mathbf{x} \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{x})$  beschreibt also nicht nur die Energieübertragung, sondern auch den mechanischen Teil der Dissipation. Setzt man die im folgenden § 6 erhaltene Lösung (68) mit (36) in Gl. (56) ein, so erhält man die explizite Form

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 4 \pi \nu n \alpha^2 \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}'}{k^2 k'^2} \frac{k^2 k'^2 - (\mathbf{k} \mathbf{k}')^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \right) \quad (57)$$

der Energieübertragung von  $\mathbf{k}$  zu  $\mathbf{k}'$ . Mittelt man diesen Ausdruck über die Richtungen von  $\mathbf{k}$ , so erhält man eine Energieübertragung von kleinen Wellenzahlen zu großen. Die Energie überträgt sich also, wie in der Hydrodynamik, von großen Wirbeln auf immer kleinere, bis zu Turbulenzelementen von der Größenordnung des mittleren Abstandes zwischen den Ladungsträgern  $(2n)^{-1/2}$ . Diese lösen sich schließlich wegen der – in unseren Gln. nicht berücksichtigten – korpuskularen Struktur des Halbleiterplasmas in der thermischen Bewegung auf. Im eigenleitenden Germanium ist  $(2n)^{-1/2} \approx 3 \cdot 10^{-5}$  cm, stimmt also ungefähr mit der DEBYE-Länge  $L_D = 6,7 \cdot 10^{-5}$  cm überein.

## § 6. Lösung der dynamischen Grundgleichungen der stationären Turbulenz

Ist das Quellglied  $h(k)$  bekannt, so erlaubt Gl. (40) prinzipiell die Bestimmung von  $u(k)$  im stationären Fall. Man kann die Lösung von (40) durch ein Iterationsverfahren erhalten, das auf einen ket-

tenbruch-ähnlichen Ausdruck führt:

$$u(k) = \frac{h(k)}{\bar{\nu} k^2 + \frac{1}{4} \pi \int_0^\infty d\zeta \Phi(k, \zeta) \frac{h(\zeta)}{\bar{\nu} \zeta^2 + \frac{1}{4} \pi \int_0^\infty \dots}} \quad (58)$$

Der Kern  $\Phi(k, \zeta)$  ist durch (39) gegeben und läßt sich in der Form

$$\Phi(k, \zeta) = k^2 \zeta^2 \psi(s), \quad s \equiv \zeta/k \quad (59)$$

$$\text{mit} \quad \psi(s) = \frac{8}{3} + f(s),$$

$$f(s) \equiv \frac{1}{s^2} - s^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - s \right)^3 \ln \left| \frac{1-s}{1+s} \right| = -f\left(\frac{1}{s}\right) \quad (60)$$

schreiben. Man sieht, daß

$$\text{für } s \rightarrow 0 \quad \psi(s) = \frac{8}{3} - \frac{16}{5} s^2 + O(s^4) \quad (61)$$

und

$$\text{für } s \rightarrow \infty \quad \psi(s) = \frac{16}{5 s^2} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (62)$$

ist.

In Gl. (58) entsprechen im zweiten Nenner der Teilnenner  $\bar{\nu} \zeta^2$  der elektrischen Dissipation und das zweite, in (58) nicht mehr angeschriebene Glied im wesentlichen der mechanischen Dissipation. Um  $u(k)$  zu berechnen, wollen wir die Kette (58) mit der Annahme abbrechen, die mechanische Dissipation sei letzten Endes auch ungefähr  $\sim k^2$ , also ähnlich der elektrischen, so daß man den gesamten zweiten Nenner gleich  $m \zeta^2$  setzen kann ( $m > \nu$ ). Dieser Ansatz führt uns zu einer Lösung. Nehmen wir nämlich an,  $h(k)$  sei einer Potenz von  $k$  proportional,  $h(k) = h k^{\varepsilon-1}$  mit reellem  $\varepsilon$ , so konvergiert das Integral in (58) nur für  $0 < \varepsilon < 2$ , wie man aus (61) und (62) ersieht. Das Integral läßt sich genau auswerten:

$$\frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\zeta \Phi(k, \zeta) \frac{h \zeta^{\varepsilon-1}}{m \zeta^2} = r(\varepsilon) \frac{h}{m} k^{2+\varepsilon}, \quad (0 < \varepsilon < 2) \quad (63)$$

$$\text{mit} \quad r(\varepsilon) \equiv \frac{3 \pi^2}{2} \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\varepsilon \pi)}{(1-\varepsilon^2)(3-\varepsilon^2)}. \quad (64)$$

Man sieht, daß dieser Ausdruck für  $0 < \varepsilon \ll 1$  tatsächlich angenähert  $\sim k^2$  ist. Der gemachte Ansatz wird also nur bei  $\varepsilon \rightarrow 0$  genau self-consistent. Allerdings tritt bei  $\varepsilon = 0$  logarithmische Divergenz auf. Nimmt man also z. B.  $10^{-2} < \varepsilon < 10^{-1}$  an, so erhält

man als Lösung von Gl. (40)

$$u(k) = \left( \frac{\bar{\nu}}{h} k^{3-\varepsilon} + \frac{r(\varepsilon)}{m} k^3 \right)^{-1} = \frac{k^{-3}}{(\bar{\nu}/h k^\varepsilon) + r(\varepsilon)/m}. \quad (65)$$

Die hier noch vorhandene effektive Reibungskonstante  $m$  läßt sich aus der self-consistence-Bedingung

$$m = \bar{\nu} + r(\varepsilon) h/m \quad (66)$$

des anfangs gemachten Ansatzes zu

$$m = \frac{1}{2} \bar{\nu} + \sqrt{(\frac{1}{2} \bar{\nu})^2 + r(\varepsilon) h} \quad (67)$$

bestimmen. Das negative Wurzelvorzeichen in (67) ergibt  $m < 0$  (negative Dissipation) und wurde daher beseitigt. Mit Gl. (67) folgt schließlich aus (65) bei sehr kleinen  $\varepsilon$ -Werten angenähert das Wellenzahlspektrum<sup>20</sup>:

$$u(k) = \alpha k^{-3}, \quad (68)$$

$$\text{worin } \alpha \equiv \left( \frac{\bar{\nu}}{2h} + \sqrt{\left( \frac{\bar{\nu}}{2h} \right)^2 + \frac{r(\varepsilon)}{h}} \right)^{-1} \equiv \frac{h}{m} \quad (69)$$

ist. Für  $h \rightarrow 0$  folgt erwartungsgemäß  $\alpha \approx h/\bar{\nu} \rightarrow 0$  und  $u(k) \rightarrow 0$ .

Die Korrelationsfunktion  $u(k, \tau)$  läßt sich aus Gl. (43) bestimmen:

$$u(k, \tau) = u(k, 0) \exp \left\{ -\tau \left( \bar{\nu} k^2 + \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \Phi(k, \kappa) u(x, 0) dx \right) \right\}. \quad (70)$$

Dabei ist  $u(k, 0)$  durch Gl. (65) gegeben. Nach dem von uns gemachten Ansatz ist die runde Klammer im Exponenten gleich  $m k^2$ . Man erhält so

$$u(k, \tau) = \frac{h}{m k^3} e^{-mk^2\tau} \quad (71)$$

mit dem in (67) erklärten  $m$  und mit der Bemerkung<sup>20</sup>, daß bei  $k \rightarrow 0$  die Potenz  $3 - \varepsilon$  im Nenner angestrebt wird:

$$u(k, \tau) \rightarrow \frac{h}{m k^{3-\varepsilon}} e^{-mk^2\tau} \text{ für } k \rightarrow 0, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (71')$$

## § 7. Das Frequenzspektrum der stationären Turbulenz

Um das Frequenzspektrum zu erhalten, benützen wir Gl. (23) und bestimmen  $w_{\alpha\beta}(\rho, \tau)$  aus Gl. (20):

$$w_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \cos \omega \tau \int w_{\alpha\beta}(k, \tau) d^3 k. \quad (72)$$

<sup>20</sup> Man ersieht aus Gl. (65), daß bei  $k \rightarrow 0$  jedenfalls  $u(k) = \alpha k^{3-\varepsilon}$  die genauere Lösung ist.

Unter isotropen Verhältnissen folgt mit (24)

$$w_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{4}{3} \delta_{\alpha\beta} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty d\tau u(k, \tau) \cos \omega \tau. \quad (73)$$

Setzen wir die Lösung (71) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{2h}{3m} \delta_{\alpha\beta} \int_0^\infty \frac{m k dk}{\omega^2 + m^2 k^4} \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{h}{m} \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\omega}. \end{aligned} \quad (74)$$

Aus Gl. (36) folgt schließlich

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}(\omega) &= \frac{4\pi}{3} \frac{\nu n h}{m} \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\omega}; \\ U(\omega) &= \frac{4\pi \nu n h}{m \omega} = \frac{2 \nu n \alpha}{f}. \end{aligned} \quad (75)$$

Es ergibt sich also ein  $1/f$ -Spektrum ( $f = \omega/2\pi$ ). Natürlich kann dieses Spektrum bei  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$  nicht unbegrenzt genau sein, da sonst das gesamte Rauschen logarithmisch divergieren würde. Tatsächlich wird für  $f \rightarrow 0$  in Gl. (74) der Integrand bei  $k = 0$  unendlich und damit für den Gesamtwert sehr wichtig, so daß die bei  $k = 0$  genauere<sup>20</sup> Lösung (71') in Gl. (73) eingesetzt werden muß. Man kommt dann zu dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{m k^{1+\varepsilon} dk}{\omega^2 + m^2 k^4} = \frac{1}{\omega^{1-\varepsilon/2} m^{\varepsilon/2}} \int_0^\infty \frac{x^{1+\varepsilon} dx}{1+x^4} \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (75')$$

und somit geht das Spektrum bei  $f \rightarrow 0$  allmählich zur  $1/f^{1-\varepsilon/2}$ -Abhängigkeit über, die keine Divergenz bei  $f = 0$  einführt.

Es bleibt noch die Frage nach der oberen Grenze des  $1/f$ -Spektrums. In diesem Zusammenhang wurde schon am Ende von § 5 betont, daß die in unserem Plasmamodell nicht erfaßte, diskrete Struktur des Halbleiterplasmas ein plötzliches Abbrechen des Wellenzahlspektrums oberhalb von  $k_M = (2n)^{1/3} = 10^5 \text{ cm}^{-1}$  mit sich bringt. Tatsächlich lösen sich Wellenlängen kürzer als  $(2n)^{-1/3}$  in der thermischen Bewegung auf, die entsprechenden Turbulenzelemente klingen also rasch ab. Setzt man in (74)  $k_M$  als obere Integrationsgrenze ein, und drückt man das Integral durch  $\text{arc tg } m k_M^2/\omega$  ( $\approx \text{const} = \frac{1}{2}\pi$  für  $\omega \ll m k_M^2$ ) aus, so folgt mit den Daten des eingeschalteten Ge ( $m \gtrsim \bar{\nu} \approx 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ ) eine obere Grenze des  $1/f$ -Spektrums von  $m k_M^2 \gtrsim 10^{18} \text{ Hz}$ , die weit außerhalb des physikalisch sinnvollen Gebietes liegt; schon bei  $10^5 - 10^6 \text{ Hz}$  wird das Funkelrauschen vom Schrottrauschen überdeckt.

### § 8. Das Spektrum der Stromschwankungen im unbegrenzten Halbleiterplasma

Der Strom durch die Fläche  $F$  eines Kreises  $K$ , den wir uns im unbegrenzten Halbleiter vorstellen, ist

$$I(t) = \iint_F \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \oint_K \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \, d\mathbf{l}. \quad (76)$$

Dieser Strom ist mit dem Strom  $I(t+\tau)$ , der die Fläche  $F$  im Moment  $t+\tau$  durchsetzt, korreliert:

$$\begin{aligned} \langle I(t) I(t+\tau) \rangle &= \iint_F d\mathbf{s}_\alpha' \iint_F d\mathbf{s}_\beta'' \langle j_\alpha(\mathbf{r}', t) j_\beta(\mathbf{r}'', t+\tau) \rangle \\ &= \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \oint_K d\mathbf{l}_\alpha' \oint_K d\mathbf{l}_\beta'' \langle B_\alpha^*(\mathbf{r}', t) B_\beta(\mathbf{r}'', t+\tau) \rangle = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \oint_K d\mathbf{l}_\alpha' \oint_K d\mathbf{l}_\beta'' W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}', \tau). \end{aligned} \quad (77)$$

Aus Gl. (20) folgt weiter

$$\langle I^*(t) I(t+\tau) \rangle = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \int d^3k W_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau) \oint_K d\mathbf{l}_\alpha' \oint_K d\mathbf{l}_\beta'' \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')\}. \quad (78)$$

Legen wir in den Mittelpunkt des Kreises  $K$  den Ursprung  $O$  eines Koordinatensystems, dessen  $z$ -Achse senkrecht zur Kreisfläche steht und dessen  $x$ -Achse mit  $\mathbf{k}$  und der  $z$ -Achse komplanar sein soll, bezeichnen wir mit  $\Theta$  die Neigung von  $\mathbf{k}$  zur  $z$ -Achse und mit  $\varphi', \varphi''$  das Azimut von  $\mathbf{r}'$  bzw.  $\mathbf{r}''$  in der Kreisfläche, so folgt mit Gl. (24) unter homogenen, isotropen Verhältnissen

$$\begin{aligned} \langle I^*(t) I(t+\tau) \rangle &= \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \frac{R^2}{2} \int d^3k U(k, \tau) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{2\pi} d\varphi'' e^{ikR \sin \Theta (\cos \varphi'' - \cos \varphi')} \\ &\cdot [\cos(\varphi' - \varphi'') - \sin^2 \Theta \sin \varphi' \sin \varphi''] = \frac{c^2 F}{2} \int_0^\infty U(k, \tau) k^2 dk \int_0^{\pi/2} J_1^2(k R \sin \Theta) \sin \Theta d\Theta. \end{aligned} \quad (79)$$

Wie in § 7, benutzen wir nun das WIENER-KHINTCHINESCHE Theorem [analog zu Gl. (23)]

$$S_I(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \langle I^*(t) I(t+\tau) \rangle \cos \omega \tau d\tau \quad (80)$$

und erhalten aus der Lösung (71) mit (36) das Spektrum:

$$S_I(\omega) = 2 c^2 \nu n F \int_0^\infty \frac{\alpha k^{-3} m k^2}{\omega^2 + m^2 k^4} k^2 dk \int_0^{\pi/2} J_1^2(k R \sin \Theta) \sin \Theta d\Theta = 2 c^2 \alpha \nu n \frac{F}{\omega} A(q). \quad (81)$$

Hier wurden die Bezeichnungen

$$q \equiv R \sqrt{\frac{\omega}{m}} \quad \text{und} \quad A(q) \equiv \int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^4} \int_0^{\pi/2} J_1^2(x q \sin \Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (82)$$

eingeführt<sup>21</sup>. Um eine Näherung für  $A(q)$  zu erhalten, kann man im zweiten Integral  $\sin \Theta$  durch  $2\Theta/\pi$  ersetzen. Man erhält dann

$$A(q) \approx \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} [J_1^2(qx) - J_0(qx) J_2(qx)] dx. \quad (83)$$

Man sieht, daß

$$\left. \begin{aligned} \text{für } q \rightarrow 0 \quad J_1^2(qx) - J_0(qx) J_2(qx) &\approx q^2 x^2/8 \quad \text{und} \quad A(q) \sim q^2, \\ \text{für } q \rightarrow \infty \quad J_1^2(qx) - J_0(qx) J_2(qx) &\approx \frac{2}{\pi q x} \quad \text{und} \quad A(q) \sim 1/q \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

<sup>21</sup> Für eigenleitendes Ge folgt mit  $m \approx 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$  und  $R = 1 \text{ cm}$   $q \approx 10^{-4} \sqrt{\omega}$ .

ist. Das Spektrum (81) fällt also mit  $\omega$  monoton ab. Bei  $\omega \rightarrow 0$  strebt es einen endlichen Grenzwert an<sup>22</sup> und bei  $\omega \rightarrow \infty$  fällt es wie  $\omega^{-3/2}$  ab. Nur wenn außerhalb dieser Grenzfälle  $A(q)$  als konstant angesehen wird, liefert Gl. (81) ein  $1/f$ -Spektrum. Für den Vergleich mit der Erfahrung ist aber nur das in § 9 abgeleitete, in einem räumlich begrenzten Halbleiter auftretende Spektrum maßgebend.

### § 9. Das Spektrum der Stromschwankungen im räumlich begrenzten Halbleiter

Der Übergang vom idealisierten Bild des unendlich ausgedehnten, homogen und isotrop aufgewirbelten Halbleiters zu einem begrenzten, z. B. zylinderförmigen Halbleiterstück, durch den der Strom  $I$  fließt, ist mit Schwierigkeiten verbunden. Die in I und II behandelten Instabilitäten erzeugen hier eine weder homogene, noch isotrope Turbulenz. In diesem Fall sind übrigens die Mittelwerte von Stromstärke  $\langle I \rangle = I_0$  und Feldstärke  $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0$  von Null verschieden; an Stelle von Gl. (77) erhält man

$$\begin{aligned} \langle I^*(t) I(t+\tau) \rangle &= \left( \frac{c}{4\pi} \right)^2 \oint_K dl_\alpha' \oint_K dl_\beta'' \langle (B_{0\alpha}^* + \delta B_\alpha^*) | (B_{0\beta}^* + \delta B_\beta) | \rangle \\ &= I_0^2 + \left( \frac{c}{4\pi} \right)^2 \oint_K dl_\alpha' \oint_K dl_\beta'' W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}', \tau), \end{aligned} \quad (85)$$

wobei aber

$$W_{\alpha\beta} = \langle \delta B_\alpha^*(\mathbf{r}, t) \delta B_\beta(\mathbf{r} + \mathbf{p}, t + \tau) \rangle \quad (86)$$

statt Gl. (19) gilt. In der zu (17) analogen Gleichung für  $\delta \mathbf{b}$  treten noch andere Glieder auf, die  $\mathbf{b}_0$  enthalten. Dasselbe gilt für die dynamischen Grundgleichungen der Turbulenz. Überhaupt ist die Behandlung der Randbedingungen an der Oberfläche des Halbleiters im  $\mathbf{k}$ -Raum praktisch nicht durchführbar. Außerdem liegt jetzt der Kreis  $K$  vom Radius  $R$  am Rande des Halbleiters, d. h. zwischen zwei Gebieten, in denen die  $W_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \tau)$  verschiedenen Bestimmungsgleichungen genügen. Das Magnetfeld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  dehnt sich auch außerhalb des Halbleiters beliebig weit aus. Deswegen wird sich das Wellenzahlspektrum  $U(k)$  auch in diesem räumlich begrenzten Fall bis zu beliebig kleinen  $k$ -Werten erstrecken, ohne daß eine untere Grenze (z. B.  $k_0 = 2\pi/R$ ) auftritt.

Wir wollen hier von einer derartigen Behandlung der inhomogenen, anisotropen Turbulenz des Halbleiterplasmas abssehen und von zwei einfachen Hypothesen ausgehend eine dimensionale Betrachtung anknüpfen. Wir postulieren also:

1) Die lokale Turbulenz, d. h. die in Gebieten, die viel kleiner sind als das gesamte Halbleiterstück, herrschende, weicht nicht wesentlich von einer homogenen Turbulenz ab, so daß die durch innere statistische Wechselwirkungen bestimmte Form (75) des

Skalars  $U(\omega) = \sum_\alpha W_{\alpha\alpha}(\omega)$  auch hier eine gute Näherung gibt. Diese auch in § 1 besprochene, in der hydrodynamischen Turbulenztheorie übliche, fundamentale Hypothese muß hier mit besonderer Vorsicht gehandhabt werden, weil der Übergang zu einem Koordinatensystem, in dem  $\mathbf{B}_0 = 0$  ist, nicht mehr durchführbar ist.

2) Das mittlere Schwankungsquadrat  $\langle I^2 \rangle$  und das Spektrum  $S_I(\omega)$  des Stromes  $I$  ist (über einen geometrischen Formfaktor) mit der Fläche  $F$  des stromdurchflossenen Halbleiterquerschnittes proportional, hängt aber weiter von keiner linearen Dimension des Querschnittes  $F$  ab. Diese Hypothese entspricht einfach dem experimentell beobachteten Verhalten des Funkelrauschen und des Stromrauschen ganz allgemein<sup>23</sup>. Das relative Rauschen  $S_I(\omega)/\langle I \rangle^2$  ist also mit  $F$  umgekehrt proportional. Erfahrungsgemäß ist dieses relative Rauschen mit dem Halbleitervolumen umgekehrt proportional, aber wir betrachten die Länge des Halbleiterzylinders als verhältnismäßig groß und konstant, so daß nur die Abhängigkeit vom Querschnitt  $F$  maßgebend ist.

Aus der zweiten Hypothese folgt, daß  $S_I(\omega)/F$  von dem Halbmesser des z. B. kreisförmig angenommenen Querschnittes  $F$  nicht abhängt. Andererseits folgt aus<sup>24</sup>

<sup>22</sup> Sie bedeutet einfach, daß die transversale Korrelation der Stromdichte in der Fläche  $F$  auf extrem kleine Bereiche beschränkt ist; siehe J. J. BROPHY, Phys. Rev. **106**, 675 [1957].

<sup>24</sup> Die eckige Klammer bezeichnet hier die physischen Dimensionen.

<sup>22</sup> Um diesen endlichen Grenzwert aus (81) zu berechnen, muß allerdings bei kleinen  $k$ -Werten Gl. (65) oder (71') für  $u(k)$  herangezogen werden, da sonst logarithmische Divergenz auftritt.

$$[B] = \left[ \frac{I}{c R} \right] \text{ und } [U(\omega)] = \left[ \frac{1}{c^2} \frac{S_I(\omega)}{F} \right]$$

durch dimensionale Betrachtungen die Beziehung

$$S_I(\omega) = c^2 F U(\omega) \chi(q). \quad (87)$$

Tatsächlich ist  $q \equiv R \sqrt{V/m}$  die einzige dimensionslose Kombination der allein maßgebenden Größen  $\omega$ ,  $m$ ,  $R$  und  $B_0$ , so daß in Gl. (87) nur eine unbestimmte Funktion  $\chi(q)$  hinzutreten konnte. Gl. (87) unterscheidet sich von Gl. (81) nur durch das Vorhandensein der unbestimmten Funktion  $\chi(q)$  an Stelle von  $A(q)$ . Da  $S_I(\omega)/F$  aber nicht von  $R$  abhängen soll, muß  $\chi(q)$  eine Konstante sein. Die erste Hypothese erlaubt uns, in Gl. (87) das  $U(\omega)$  aus Gl. (75) einzusetzen, so daß schließlich

$$S_I(\omega) = 4 \pi \nu n \alpha c^2 \chi F / \omega \quad (88)$$

also ein reines  $1/f$ -Rauschen, folgt. Dieses Ergebnis gestattet die allgemeine Deutung des Funkelrauschen als Turbulenzprozeß. Aus Gl. (87) folgt, daß die in § 7 gemachten Bemerkungen über die Grenzen des  $1/f$ -Spektrums auch hier anwendbar sind.

## § 10. Das Funkelrauschen als Turbulenzprozeß

Das Funkelrauschen, oft als  $1/f$ -Rauschen und manchmal auch als „Excess Noise“ oder Kontakt-rauschen bezeichnet, liefert bei niederen Frequenzen den größten Beitrag zum Stromrauschen der Halbleiter<sup>25</sup>. Es tritt allgemein in Halbleitern und Halbleiterbauelementen, in Kohleschichtwiderständen, Kohlemikrofonen, dünnen Metallschichten, schlechten Kontakten und elektronischen Röhren mit einem Spektrum der Form

$$S_I(f) = A I^p / f^r \quad (89)$$

auf, worin die Potenz  $p$  der Stromdichte  $I$  gewöhnlich 2 ist (oft kommen ganz andere  $p$ -Werte vor<sup>26, 27</sup>) und  $r = 1$  ist (es kommen oft 10 – 30% abweichende  $r$ -Werte vor). Dieses Spektrum kann sich über 7 bis

<sup>25</sup> Siehe z. B. H. PFEIFER, Elektronisches Rauschen, I. Teil, Teubner-Verlag, Leipzig 1959, S. 50 – 70; A. VAN DER ZIEL, Fluctuation Phenomena in Semiconductors, Butterworths, London 1959, S. 46 – 60, 137 – 143; D. A. BELL, Electrical Noise, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960, S. 210 – 245.

<sup>26</sup> J. J. BROMPHY, J. Appl. Phys. **27**, 1383 [1956].

<sup>27</sup> R. J. J. ZIJLSTRA, Physica **28**, 971 [1962].

<sup>28</sup> B. V. ROLLIN U. I. M. TEMPLETON, Proc. Phys. Soc. London B **66**, 259 [1953]; **67**, 271 [1954].

<sup>29</sup> D. K. BAKER, J. Appl. Phys. **25**, 922 [1954].

<sup>30</sup> T. E. FIRLE U. H. WINSTON, J. Appl. Phys. **26**, 716 [1955].

10 Zehnerpotenzen der Frequenzskala erstrecken. Die obere Grenze, bei der das  $1/f$ -Rauschen vom Schrottrauschen oder vom thermischen Rauschen überdeckt wird, liegt bei  $10^4$  –  $10^6$  Hz. Die untere Grenze des  $1/f$ -Rauschens konnte nicht genau festgestellt werden: man konnte es bis  $2 \cdot 10^{-4}$  Hz in Germaniumeinkristallen und Kohleschichtwiderständen<sup>28</sup>, und sogar bis  $10^{-6}$  Hz bei Halbleiter-Spitzen-dioden<sup>29, 30</sup> nachweisen.

Das Funkelrauschen von Halbleitern hängt stark vom Zustand der Oberfläche ab<sup>31 – 33</sup>, ist aber in den meisten Fällen temperaturunabhängig<sup>34</sup>. Es wurden im Laufe der Zeit verschiedene Theorien des Funkelrauschen aufgestellt<sup>35 – 40</sup>, die aber keine einheitliche und befriedigende Erklärung dieser so verbreiteten Erscheinung liefern.

So wird z. B. in der Theorie von McWHORTER<sup>37</sup> das Funkelrauschen als eine Überlagerung unabhängiger Schrot-Komponenten mit Spektren der Form  $\text{const} / (1 + f^2 \tau^2)$  gedeutet, die von verschiedenen Bereichen der Halbleiteroberfläche herrühren. Die Größe der Bereiche entspricht ungefähr der DEBYE-Länge. Jeder Bereich enthält langsame Oberflächenzustände mit einer gewissen, für den Bereich charakteristischen Relaxationsdauer  $\tau$ . Wird als Häufigkeit der Bereiche  $g(\tau) = \text{const} / \tau$  angenommen, so folgt theoretisch ein  $1/f$ -Spektrum. Diese Annahme findet aber schwerlich eine universelle Begründung. In der Theorie von MORRISON<sup>38</sup> wird die Halbleiteroberfläche als homogen betrachtet und keine spezielle Verteilung der Relaxationszeiten angenommen. Die niederfrequenten Schwankungen werden in diesem Fall auf Höhenschwankungen der Potentialschranke, die die langsamsten Oberflächenzustände vom Volumen absondert, zurückgeführt. Diese Schwankungen werden auf Schwankungen in der Besetzung der langsamsten Oberflächenzustände zurückgeführt, müssen aber sehr groß sein, um die Weite des  $1/f$ -Spektrums zu erklären. Eine andere, von BESS aufgebaute Theorie<sup>39</sup>, die das Funkelrauschen auf einen Migrationsprozeß der Fremdatome entlang den Verset-

<sup>31</sup> T. G. MAPLE, L. BESS U. H. A. GEBBIE, J. Appl. Phys. **26**, 490 [1955].

<sup>32</sup> H. C. MONTGOMERY, J. Appl. Phys. **33**, 2143 [1962].

<sup>33</sup> A. U. MCRAE, J. Appl. Phys. **33**, 2570 [1962].

<sup>34</sup> H. C. MONTGOMERY, Bell. Syst. Techn. J. **31**, 950 [1952].

<sup>35</sup> W. SCHOTTKY, Phys. Rev. **28**, 74 [1926].

<sup>36</sup> G. G. MACFARLANE, Proc. Phys. Soc. London **59**, 366 [1947].

<sup>37</sup> A. L. MACWHORTER, Phys. Rev. **98**, 1191 [1955].

<sup>38</sup> S. R. MORRISON, Phys. Rev. **99**, 1655, 1904 [1955].

<sup>39</sup> L. BESS, Phys. Rev. **91**, 1569 [1953].

<sup>40</sup> H. SCHÖNFELD, Z. Naturforsch. **10 a**, 291 [1955].

zungslinien und an der Oberfläche zurückführt, ist auch nicht völlig befriedigend, da sie viele unbestimmte Parameter enthält. SCHÖNFELD<sup>40</sup> hat bemerkt, daß die Überlagerung vieler unabhängiger Prozesse mit der Zeitabhängigkeit  $1/\sqrt{t}$  auch ein  $1/f$ -Spektrum ergibt; es bleibt die Frage nach der Natur dieser Prozesse.

In einer früheren Arbeit<sup>41</sup> wurde eine qualitative Erklärung des Funkelrauschen als Turbulenzprozeß gegeben. Von einer Annahme über das Vorhandensein von Plasmainstabilitäten ausgehend, wurde die daraus folgende Turbulenz des Halbleiterplasmas als Ursache des Funkelrauschen erkannt. Das  $1/f$ -Spektrum des Funkelrauschen wurde als Frequenzspektrum der stationären Turbulenz im Halbleiterplasma gedeutet, und der in dieser Arbeit beschritte Weg über die statistische Dynamik der Turbulenz wurde dort vorgeschlagen. Auf Grund dieser Hypothese über das Wesen des Funkelrauschen wurden in der genannten Arbeit die bekannten Eigenschaften des Funkelrauschen qualitativ erklärt.

Die in diesem Zyklus von 3 Arbeiten durchgeführte Analyse der Instabilitäten und der Turbulenz im Halbleiterplasma ermöglicht es, die Eigenschaften des Funkelrauschen genauer zu erfassen. Die wichtigste Eigenschaft des Funkelrauschen – das  $1/f$ -Spektrum – wurde bereits in § 9 unter Benützung von zwei Hypothesen abgeleitet. Eine untere Grenze des  $1/f$ -Spektrums muß – den Ausführungen von § 7 und der abschließenden Bemerkung von § 9 entsprechend – gar nicht existieren, da bei  $f \rightarrow 0$  die genaue, aus Gl. (65) mit  $0 < \varepsilon \ll 1$  folgende Form (75') des Spektrums  $f^{\varepsilon/2-1}$  enthält und also keine Divergenz mit sich bringt. Allerdings bringt schon allein die endliche Dauer  $T$  einer Rauschmessung stets eine untere Gültigkeitsgrenze des gemessenen Spektrums mit sich. Man kann nämlich zeigen, daß, wenn im unbegrenzt stationären Regime  $S(\omega) \sim \omega^s$  sein sollte ( $s$  real), ein effektiv in der Zeit  $T$  gemessenes Spektrum für  $\omega \ll 1/T$  die Form

$$S'(\omega) \sim \omega^{s+1}$$

haben muß. Da unbegrenzt stationäre Prozesse in der Natur nicht vorkommen und nur Idealisierungen darstellen, bringt sogar der Fall  $s = -1$  mit seiner logarithmischen Divergenz keine Schwierigkeiten

mit sich. Die obere, durch die Länge  $(2n)^{-1/2}$  oder durch die DEBYE-Länge gesetzte (ebenfalls in § 7 besprochene) Grenze liegt sehr hoch, hat also keinen praktischen Wert, da schon bei kleineren Frequenzen andere Arten von Stromrauschen das Funkelrauschen tarnen.

Das  $1/f$ -Spektrum folgt bei der hier entwickelten Theorie in allgemeiner und natürlicher Weise aus dem inneren statistischen Gleichgewicht der stationären Plasmaturbulenz und ist also durch die Wechselwirkung der verschiedenen Turbulenzelemente im Wellenzahlspektrum  $U(k)$  aus sich heraus bestimmt. In Anlehnung an die Theorie von MACWHORTER könnte man sagen, daß auch in unserer Theorie das  $1/f$ -Spektrum durch eine Überlagerung unabhängiger Komponenten der Form  $(1 + f^2 \tau^2)$  zustande kommt, nur daß hier jede Komponente einem gewissen  $|\mathbf{k}|$ -Wert entspricht, also von Turbulenzelementen mit einer gewissen charakteristischen Länge herrührt.

Das in Gl. (40) eingeführte  $h(k)$  wird von den vorhandenen Instabilitäten und von der direkten Wechselwirkung der Turbulenzelemente mit der Hauptströmung bestimmt. Nimmt man an,  $h$  sei dem Quadrat des angelegten elektrischen Feldes  $\mathbf{E}_0$  (oder des Gesamtstromes  $I_0$ ) proportional, so wird auch das Rauschen gemäß Gl. (88) und (69) dieselbe Abhängigkeit zeigen. Die erfahrungsgemäß auftretenden, oft stark vom  $\sim I_0^2$ -Gesetz abweichenden Abhängigkeiten<sup>26, 27</sup> gestatten es, Schlüsse über das jeweilige  $h$  und über die Art der vorhandenen Instabilitäten zu ziehen.

Die starke Abhängigkeit des Funkelrauschen vom Zustand der Halbleiteroberfläche ist auf folgende Gründe zurückzuführen:

1. Alle Arten von Instabilitäten werden durch Halbleiterinhomogenitäten gefördert. Die Oberfläche ist die wichtigste Inhomogenität. Entlang der Oberfläche können sich hohe Stromdichten und hydro-magnetisch instabile Stromkanäle ausbilden, die vom Oberenächenpotential, d. h. vom Zustand der Oberfläche kontrolliert sind.

2. Die in I. A aufgefundenen Oberflächen-Instabilitäten treten im Rahmen der dort erzielten Näherung nur bei Inversions- oder Verarmungsschichten auf, deren Oberflächenpotential genügend groß ist. Nun verursachen aber erfahrungsgemäß gerade diese Oberflächen das größte Funkelrauschen, das übrigens auch ein spezielles temperaturabhängiges Verhalten

<sup>41</sup> P. H. HANDEL, Ein neuer Weg zur Theorie des niederfrequenten Rauschens in Halbleitern, Rev. Roumaine Physique 7, 407 [1962] (Russisch).

zeigt<sup>42</sup>. Es ist deswegen sehr wahrscheinlich, daß diese Instabilitäten eine wichtige Rolle spielen und die große Oberflächenempfindlichkeit mit sich bringen. Allerdings ist es fraglich, ob diese Instabilitäten in einer höheren Stufe des in I. A angegebenen Näherungsverfahrens überhaupt noch erscheinen.

3. Allgemein werden die Instabilitäten und die damit verbundenen Turbulenzerscheinungen durch den rekombinativen Plasmaschwund abgeschwächt. Die Oberflächenrekombination muß also auch eine Abnahme des Funkelrauschens bewirken. Tatsächlich rauschen sandgestrahlte Halbleiterproben weniger als geätzte (deren Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit kleiner ist).

Schlechte Kontakte verursachen erfahrungsgemäß stets ein Funkelrauschen. In II, § 4 wurde gezeigt, wie am Kontakt zweier identischer Halbleiterstücke hydromagnetische Instabilitäten auftreten. Ebenso kommen, auch wenn die sich berührenden oder angeschweißten Halbleiterstücke ganz verschieden sind, Instabilitäten zustande. Wesentlich für das Auftreten der Instabilitäten ist allein das Vorhandensein der Elektronen-Zustände auf der Kontaktfläche. Die Besetzung dieser zusätzlichen Zustände ruft die Potentialschwelle hervor.

Das starke Funkelrauschen der Metall-Halbleiterkontakte röhrt von Strominstabilitäten an den (auch im reellen p – n-Ubergang vorhandenen) Kanälen her, die die sich ausbildende Sperrsicht durchsetzen oder überbrücken (siehe II, § 5). Überhaupt können in makroskopisch homogenen Halbleitern Strominstabilitäten an Korngrenzen, die quer zur Stromrichtung verlaufende Potentialschwellen verursachen, auftreten. Das starke Funkelrauschen der Kohlemikrophone und der Schichtwiderstände, sowie der dünnen Metallschichten ist auch auf dieser Grundlage als Überlagerung von Kontaktgeräuschen zu deuten.

Voraussetzung für das Auftreten der Instabilitäten und der Turbulenz ist das Vorhandensein von Ladungsträgern beider Vorzeichen. Diese Eigenschaft haben alle am Anfang dieses Paragraphen aufgezählten, Funkelrauschen aufweisenden Systeme, sogar die erwähnten Metallschichten und die elektronischen Lampen. Bei letzteren handelt es sich wahrscheinlich um in der Nähe der Kathodenfläche ausgelöste Instabilitäten, und Turbulenz im Plasma der Ladungsträger aus der Oxydschicht und einer dünnen Restgasschicht.

<sup>42</sup> A. U. MCRAE u. H. LEVINSTEIN, Phys. Rev. **119**, 62 [1960].

Ist nur eine Art von Ladungsträgern vorhanden, wie z. B. in den Metallen, so können die in I und II untersuchten Instabilitäten und die Turbulenz nicht zustande kommen, es gibt also kein Funkelrauschen. Tatsächlich würden Dichteschwankungen der Ladungsträger [z. B.  $N'$  in II, Gl. (23)] in diesem Fall starke Abweichungen von der Quasineutralität darstellen, also hohe elektrische Felder mit sich bringen, was energetisch zu ungünstig ist. Es könnte z. B. grundsätzlich kein Pinch-ähnlicher Konstriktionseffekt auftreten. Die für die Turbulenz wesentliche Möglichkeit eines laufenden chaotischen Überganges von der magnetischen Energie zur Kompressionsenergie des Plasmas und umgekehrt wäre nicht mehr gegeben. Es bliebe nur noch die Möglichkeit des energetisch für die Turbulenz zu ungünstigen Austausches zwischen elektrostatischer und Kompressionsenergie.

Auch die von uns behandelte Turbulenz ist energetisch kostspielig, wegen der Größe der dissipativen Glieder. Außerdem erfaßt sie – im Gegensatz zur hydrodynamischen Turbulenz – nur einen sehr geringen Teil der gesamten Halbleitermasse, weil das Kristallgitter nicht von ihr ergriffen wird. So erklärt es sich, daß das Funkelrauschen stets sehr gering im Vergleich mit dem Gesamtstrom oder mit der angelegten Spannung bleibt. Die Ersechinung ist ohne eine entsprechende Verstärkung nicht beobachtbar. Definiert man, wie in der Hydrodynamik, einen turbulenten Bestandteil  $R'$  des elektrischen Widerstandes durch

$$R = R_0 + R'; \quad R' = \frac{\langle (\delta I)^2 \rangle}{I_0^2} R_0, \quad (90)$$

worin  $R_0$  der Widerstand im laminaren Zustand,  $I_0$  die mittlere Stromstärke und  $\delta I$  die Stromschwankung ist, so fällt  $R'$  so gering aus, daß er praktisch nicht beobachtbar ist. Man erhält z. B. für einen Ge-Einkristall von  $7 \times 0,5 \times 0,3 \text{ mm}^3$ , mit dem spezifischen Widerstand  $10 \Omega \text{ cm}$ , bei  $I_0 = 2 \text{ mA}$  aus Gl. (90) den Wert  $R' = 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot R = 7,46 \cdot 10^{-9} \Omega$ , obwohl in diesem Fall das Funkelrauschen bei 100 Hz mit  $5 \cdot 10^{-14} \text{ V}^2/\text{Hz}$  mehr als 1000-mal das zu  $3 \cdot 10^{-17} \text{ V}^2/\text{Hz}$  berechnete Schrotrauschen übertrifft<sup>34</sup>.

Wie schon in der Einleitung betont wurde, kann diese Theorie der Turbulenz und des Funkelrausches nur als Modelltheorie angesehen werden; weitere Arbeit ist notwendig, um die hier gemachten Einschränkungen (Eigenleitung, gleiche Beweglich-

keit der Ladungsträger, homogene und isotrope Turbulenz etc.) zu beseitigen. Die Erweiterung auf Störstellenleitung und verschiedene Beweglichkeiten führt, selbst wenn die Trägerdichten sehr verschieden sind, zu keinen prinzipiellen Schwierigkeiten. Sie bringt jedoch eine Vergrößerung des rechnerischen Aufwandes mit sich.

Herrn V. SERGIESCU, der mich in die Problematik des Funkelrauschens eingeführt hat, möchte ich für nützliche Ratschläge und Diskussionen meinen Dank aussprechen. Auch bin ich Herrn Dr. R. GRIGOROVICI für das kritische Durchlesen der 3 Manuskripte und Herrn Prof. Dr. V. NOVACU für die nützlichen Diskussionen und das gezeigte Interesse zu besonderem Dank verpflichtet.

## Plastic Flow of Solid Mixtures of $\text{Li}_2\text{SO}_4$ and $\text{K}_2\text{SO}_4$

ARNOLD LUNDÉN, BJÖRN JONSON, and BENGT AUGUSTSSON

Department of Physics, Chalmers Institute of Technology, Göteborg, Sweden

(Z. Naturforschg. 21 a, 593—594 [1966]; received 20 October 1965)

The addition of  $\text{K}_2\text{SO}_4$  to  $\text{Li}_2\text{SO}_4$  causes a considerable change in the rheological properties of the cubic high temperature modification. A simple device for relative measurements of the plastic flow of the salt consisted of a sphere of stainless steel at the end of a steel rod on top of which weights were hung in order to obtain a suitable penetration rate through the salt. This rate depended on the composition of the mixture as well as on the thermal pretreatment of the salt. The temperature dependence was strong; a crude estimation gave an "activation energy" of the order of  $2 \times 10^5$  cal/mole, i. e. more than an order of magnitude higher than for electrical conductivity or cation self-diffusion. This result is in agreement with the interpretation of the electrical conductivity as being due solely to cation transport.

In a recent investigation of electromigration in lithium-rich solid mixtures of alkali sulfates it was found that the electrodes sunk down into the salt<sup>1</sup>, while this did not occur for pure  $\alpha\text{-Li}_2\text{SO}_4$ . From this observation we concluded that it should be possible to make crude measurements of the "viscosity" of the solid mixtures and compare the results with self-diffusion and conductivity data.

The measuring device consisted of a sphere of stainless steel (diam. 20 mm) sitting at the low end of a steel tube (ext. diam. 6 mm), which was centered through an opening in the top lid of a vertical steel tube (inner diameter 58 mm) containing the salt. The wide tube was heated in an oven, where the temperature gradient was negligible over a range of several cm. The temperature was measured with a thermocouple (MegopaK type K, Honeywell Regulator Company) placed inside the steel sphere. By loading weights on top of the 6 mm tube, the sphere was forced to penetrate through the salt with a rate that was measured with a cathetometer. Pure  $\text{Li}_2\text{SO}_4$  and four mixtures were investigated, see Table 1.

In the experiments with 0, 4.0, 8.5, and 12.4%  $\text{K}_2\text{SO}_4$  the salt was first heated to about 900 °C and

| $\text{K}_2\text{SO}_4$<br>mole % | Temp.<br>°C | $v$<br>mm/h | Remark |
|-----------------------------------|-------------|-------------|--------|
| 0                                 | 780         | $\ll 0.1$   | h, e   |
| 4.0                               | 732         | 5.9         | h      |
|                                   | 680         | 0.1         | h, e   |
|                                   | 630         | 0.01        | h, e   |
| 8.5                               | 620         | 2.1         | h      |
|                                   | 605         | 1.4         | h      |
| 12.4                              | 580         | 23          | h      |
|                                   | 570         | 0.5         | h, e   |
| 0.86                              | 825         | 51          | h      |
|                                   | 820         | 27          | h      |
|                                   | 815         | 1.6         | h      |
|                                   | 820         | 2.1         | c      |
|                                   | 810         | 0.79        | c      |
|                                   | 805         | 0.73        | c      |

Table 1. Penetration of a heavy steel device through solid  $\text{Li}_2\text{SO}_4\text{-K}_2\text{SO}_4$  mixtures<sup>3</sup>.  $v$  = constant penetration rate. The thermal pretreatment is indicated by h if the desired temperature was approached from above, and by c if from below. e denotes that the sphere had penetrated only slightly into the salt, and that the extrapolated  $v$  is only to be taken as an approximate indication of the order of magnitude.

then cooled to the desired temperature. When this temperature became stable, the sphere was lowered until it touched the surface of the salt, and the measurement was started. The penetration rate which was highest in the beginning became constant after a depth of the order of the radius of the sphere had been reached. However, in some cases the penetra-

<sup>1</sup> V. LJUBIMOV and A. LUNDÉN, Z. Naturforschg., in press.